10 – апта.

Жоғарғы ретті дербес туындылар. Аралас туындылар туралы теоремалар

$z=f(x;y)$ функциясы беріліп, оның f'_x және f'_y дербес туындылары табылсын. f'_x және f'_y -тің тағы бір туындылары, егер олар табылса, берілген функцияның екінші ретті дербес туындылары деп аталады:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$n>2$ ретті дербес туындыларды да осыған сәйкес табуға болады.

Теорема 2. Егер $z=f(x;y)$ функциясы мен $f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$ анықталған және $M(x;\ y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде

$$f''_{xy}=f''_{yx}$$

Толық дифференциал

Анықтама 9. $z=f(x;y)$ функциясының дифференциалы былай белгіленеді $(\Delta x=dx\ ,\ \Delta y=dy)$:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Жоғарғы ретті толық дифференциалдар

Жоғарғы ретті дербес дифференциалдар (символдық формуласы) мына формула бойынша есептеледі: $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$.

Функцияның экстремумы

Анықтама 10. $z = f(x, y)$ функциясының $P(a,b)$ нүктесінде $f(a,b)$ максимумы (минимумы) бар деп айтамыз, егер барлық P-дан өзге $P'(x, y)$ нүктелері үшін P нүктесінің жеткілікті аз аймағында $f(a,b) > f(x, y)$ теңсіздігі орындалса (немесе сәйкесінше $f(a,в) < f(x, y)$). Функцияның максимумы немесе минимумы осы функцияның экстремумдары деп аталады.

Экстремумның қажетті шарты:

Анықтама 11. Дифференциалданатын $f(x, y)$ функциясының экстремумы болатын (a,b) нүктесі кризистік нүкте деп аталады. Ол төмендегі теңдеулер жүйесін шешу жолымен табылады:

$$f'_x(a,b) = 0, \; f'_y(a,b) = 0 \tag{2}$$

(2) жүйесі $df(x,y) = 0$ теңдеуіне эквивалентті.

Жалпы жағдайда, $f(x, y)$ функциясының $P(a,b)$ экстремум нүктесінде не $df(a,b) = 0$, не $df(a,b)$ табылмайды.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0 \text{ және } A = f''_{xx}(a,b),\ B = f''_{xy}(a,b),\ C = f''_{yy}(a,b) \text{ болсын.}$$

Онда дискриминант $\Delta = AC - B^2$ құрамыз.

Онда:

1) егер $\Delta > 0$, онда функцияның $P(a,b)$ нүктесінде экстремумы бар және ол максимум болады, егер $A < 0$ (немесе $C < 0$) болса, және минимум болады, егер A>0 (немесе C>0) болса;

2) егер $\Delta < 0$ болса, онда $P(a,b)$ нүктесінде экстремум жоқ;

3) егер $\Delta = 0$, онда $P(a,b)$ нүктесінің экстремум нүктесі болу, болмауы ашық сұрақ боп қалады (қосымша зерттеулер қажет).

Екі айнымалы функциялар сияқты үш және одан да көп айнымалы функциялар үшін де экстремумдарының қажетті және жеткілікті шарттары осыған ұқсас.

Мысал 5. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясын экстремумға зертте. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,\ y_2 = 1,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0.$

Екі $M_1(1;1)$, $M_2(0;0)$ кризистік нүкте аламыз.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

1. $M_1(1;1)$ нүктесін қарастыралық

   $A = 6;\ B = -3;\ C = 6 \Rightarrow \Delta = -27 < 0,\ A = 6 > 0.$

   Сонымен, $M_1(1;1)$ нүктесінде z функциясының минимумы бар.

2. $M_2(0;0)$ нүктесін қарастырайық, онда $A = 0;\ B = -3;\ C = 0 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ - берілген функцияның M_2 нүктесінде экстремумы жоқ.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

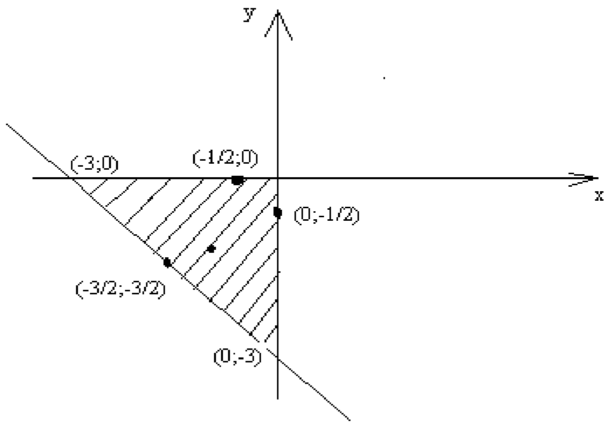
Шектелген тұйық облыста дифференциалданатын функция өзінің ең үлкен (ең кіші) мәнін облыстың ішкі нүктелеріндегі кризистік нүктелерде немесе оның шекаралық нүктелерінде қабылдайды.

Мысал 6. Берілген функцияның

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

$x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3$ облысындағы ең үлкен және ең кіші мәнін тап.

Шешуі. Бұл облыс үшбұрыш (сурет 1).



Сурет 1

1) Кризистік нүктелерін табамыз:

$$z'_x = 2x - y + 1 = 0,$$
$$z'_y = 2y - x + 1 = 0;$$

бұдан x=-1, y=-1; яғни, M(-1; -1) нүктесін аламыз. M нүктесіндегі функцияның мәні $z_M = -1$. Бұл нүктені экстремумға зерттеу міндетті емес.

2) Функцияны шекаралық нүктелерде зерттейміз.

x=0 болса, онда $z = y^2 + y$ болады және бұл есеп бір айнымалы функцияның $-3 \le y \le 0$ кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәнін іздеуге әкеп соғады. Зерттеу жүргізе отырып, (0;-3) нүктесінде $(z_{\text{ен үлкен}})_{x=0} = 6$ ең үлкен мән қабылдайды; ал $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ нүктесінде $(z_{\text{ен кіші}})_{x=0} = -\frac{1}{4}$ ең кіші мәнін қабылдайды. Ал, *y=0* болса, онда $z = x^2 + x$. Онда бұл функция (-3;0) нүктесінде $(z_{\text{ен үлкен}})_{y=0} = 6$ ең үлкен мән қабылдайды; ал $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ нүктесінде $(z_{\text{ен кіші}})_{x=0} = -\frac{1}{4}$ ең кіші мәнін қабылдайды.

x+y=-3 немесе y=-3-x болса, $z = 3x^2 + 9x + 6$ болады. Сонымен, $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ нүктесінде $(z_{\text{ен кіші}})_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$ ең кіші мәнін қабылдайды; ал $(z_{\text{ен үлкен}})_{x+y=-3} = 6$ ең үлкен мәні $(z_{\text{ен үлкен}})_{x=0}$ және $(z_{\text{ен үлкен}})_{y=0}$ мәндерімен беттеседі. *x+y=-3* түзуінде функцияны бір айнымалы функцияға келтірмей-ақ шартты экстремумға зерттеуге болушы еді.

3) Алынған барлық мәндерді салыстыра отырып, *z* функциясы (0;-3) және (-3;0) нүктелерінде $z_{\text{ен үлкен}} = 6$ ең үлкен мәнін қабылдайды; ал M стационар нүктесінде $z_{\text{ен кіші}} = -1$ ең кіші мәнін қабылдайды деген қорытындыға келеміз.